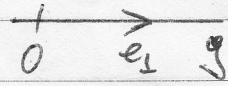
АГ Иванов Заместник 20.11.12

От минали път

g - крайна права в $U = O\vec{e}_1 - AUC$



$g(01)$

$U_g(10)$

$\tau M(X) \Rightarrow \forall (xt)$ т.ее $\frac{x}{t} = X$ са хомог коорд

$M = xU_g + tO$

Нека $P_S(x_S t_S) \in g$, $P_i \in P_I$, $i \neq I$, $S = \overline{1,4}$

значи $P_S = x_S U_g + t_S O \Rightarrow$ $\delta(P_1P_2P_3P_4) =$

$= \frac{(13)(24)}{(14)(23)} \Rightarrow$ $(13) = \begin{vmatrix} x_1 & t_1 \\ x_3 & t_3 \end{vmatrix} = x_1 t_3 - x_3 t_1 \Rightarrow$

$$\frac{(x_1 t_3 - x_3 t_1)(x_2 t_4 - x_4 t_2)}{(x_1 t_4 - x_4 t_1)(x_2 t_3 - x_3 t_2)}$$

Ако P_S - крайна $P_S(x_S 1)$

x_S - афинни кохомогенни коорд (AXK)

$\Rightarrow (P_1P_2P_3P_4) = \frac{(x_1 - x_3)(x_2 - x_4)}{(x_1 - x_4)(x_2 - x_3)} = 1$

Забележка

Нека g^+ - положително насочена ос



$\vec{AB}$

насочена отсечка $\overline{AB} = \varepsilon |\vec{AB}|$

$\varepsilon = \begin{cases} 1 & \text{ако } \vec{AB} \text{ едноименна} \\ -1 & \text{ако } \vec{AB} \text{ противопол.} \end{cases}$

Просто отношение на наредената тройка точки A, B, C в/у g^+ Нарисаме числото

$(ABC) = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$ - просто отношение

(P)

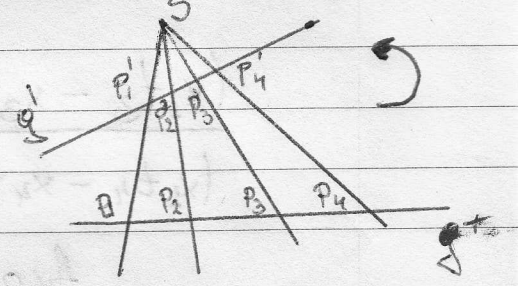
$(X_1X_2X_3)$ $(X_1X_2X_4)$

от $(P_1P_2P_3P_4) \Rightarrow \dfrac{\overline{X_1X_3}\ \overline{X_2X_4}}{\overline{X_1X_4}\ \overline{X_2X_3}} = \dfrac{\overline{X_1X_3}}{\overline{X_2X_3}} : \dfrac{\overline{X_1X_4}}{\overline{X_2X_4}}$

$\dfrac{(X_1X_2X_3)}{(X_1X_2X_4)}$ - двойно отношение е число на двете трости отношения

I/ на Пап g, g' (крайни прави)

Нека $P_1P_2P_3P_4 \in g$ $P_1'P_2'P_3'P_4' \in g'$ т.че правите P_iP_i' се пресичат в една точка S (крайна или безкрайна) $S \in g, g'$ - Тогава $(P_1P_2P_3P_4) = (P_1'P_2'P_3'P_4')$



Д-во

Нека α - равнина на която лежат g и g'. Ориентираме α и $g \to g^+$

Нека $h = d(S, g)$ е разстоянието

(1) S - крайна $\Rightarrow$

$$(P_1P_2P_3P_4) = \frac{\overline{P_1P_3}\ \overline{P_2P_4}}{\overline{P_2P_3}\ \overline{P_1P_4}} = \frac{\frac{1}{2}h\,\overline{P_1P_3}\ \ \frac{1}{2}h\,\overline{P_2P_4}}{\frac{1}{2}h\,\overline{P_2P_3}\ \ \frac{1}{2}h\,\overline{P_1P_4}}$$

$\frac{1}{2}h\,\overline{P_1P_2}$ - ориентирано лице на $\Delta(P_1P_2S)$

аналогично с останалите

$\frac{1}{2}h\,\overline{P_iP_J}$ - ориентирано лице на $\Delta(P_iP_JS)$

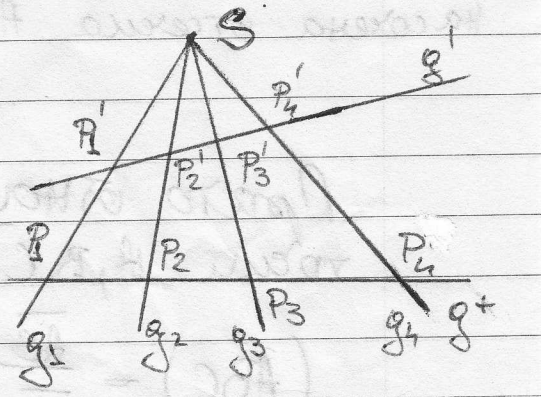
Нека $P_iP_i' = q_i$

Но от друга страна

ориентираното лице на $\Delta(P_iP_JS) =$

$= \frac{1}{2}|SP_i||SP_J| \sin(q_i, q_J)$

$\sin\angle(q_i, q_J)$ - ориентиран ъгъл $\Rightarrow$



(2)

$\frac{1}{2}|SP_1||SP_3|\sin(g_1g_3)e \cdot \frac{1}{2}|SP_2||SP_4|\sin(g_2g_4)e$ =

$\frac{1}{2}|SP_2||SP_3|\sin(g_2g_3)e \cdot \frac{1}{2}|SP_1||SP_4|\sin(g_1g_4)e$

$= \frac{\sin(g_1g_3)e \sin(g_2g_4)e}{\sin(g_2g_3)e \sin(g_1g_4)e}$ | | |

аналогично Двойно отношение

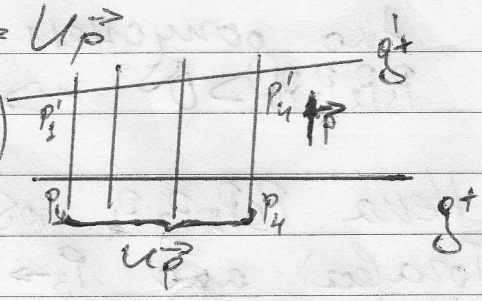
$(P_1'P_2'P_3'P_4') = \frac{\sin(g_1g_3)e \sin(g_2g_4)e}{\sin(g_2g_3)e \sin(g_1g_4)e}$ ⟹

двойно отношение на $(P_1P_2P_3P_4) = (P_1'P_2'P_3'P_4')$

(2) S - безкрайна $S = U\vec{p}$

$P_1P_2P_3P_4 \overset{?}{=} \frac{\overline{P_1'P_3'}\ \overline{P_2'P_4'}}{\overline{P_2'P_3'}\ \overline{P_1'P_4'}} = (P_1'P_2'P_3'P_4')$

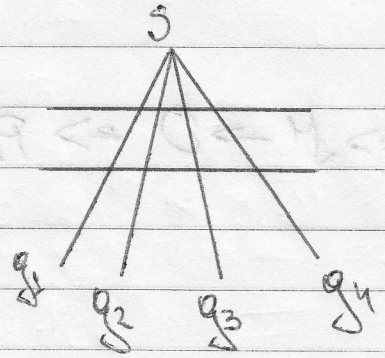
по ↳ на Талес ⟸



Деф

Двойно отношение на 4 прави от един сноп наричаме число:

| | | $(g_1g_2g_3g_4) = \frac{\sin(g_1g_3)e \sin(g_2g_4)e}{\sin(g_2g_3)e \sin(g_1g_4)e}$ //



Всяко отношение е равно на другото отношение

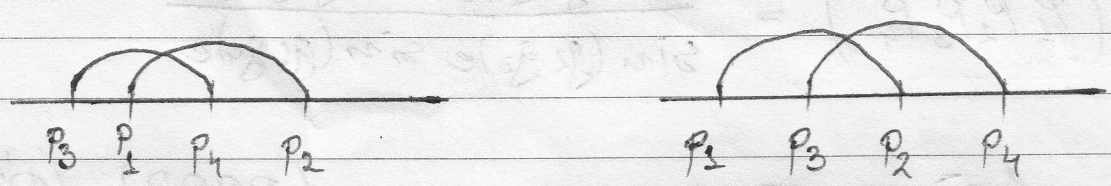
(3)

Хармонични групи

Деф. Нека $(P_1P_2P_3P_4)$ са колинеарни. Тогава наредената четворка $(P_1P_2P_3P_4)$ се нарича хармонична група ако $\underline{(P_1P_2P_3P_4) = -1}$

Свойства

1) Ако $P_1P_2P_3P_4$ образуват хармонична група то P_1P_2 "дели" P_3P_4



Док-во

Ако допуснем че P_3P_4 са м/у P_1P_2 то $P_3P_2P_3P_4 > 0 \Rightarrow$ ↯ (противоречие)

2) Нека $P_3P_2P_3P_4$ образуват хармонична група. Тогава ако $P_3 \to P_2$ то и $P_4 \to P_2$

Док-во

$$(P_1P_2P_3P_4) = -1 = \frac{(13)(24)}{(14)(23)} \begin{matrix} \to 0 \\ \to 0 \end{matrix} \Rightarrow$$

(строго)

$$\left.\begin{matrix} P_3 = \lambda P_1 + P_2 \\ P_4 = \mu P_1 + P_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow (P_1P_2P_3P_4) = \frac{\mu}{\lambda} = -1 \Rightarrow$$

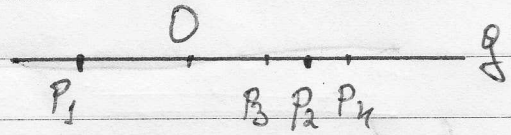
$$\boxed{\lambda + \mu = 0}$$

Ако $P_3 \to P_2 \Rightarrow \lambda \to 0 \Rightarrow \mu \to 0 \Rightarrow P_4 \to P_2$

Задача:

Да се докаже че крайните точки $P_1P_2P_3P_4$ образуват хармонична група $\Leftrightarrow$ $\overline{OP_1}^2 = \overline{OP_3}\,\overline{OP_4}$, където т. O е среда на (P_1P_2)

Реш.-е



Нека $k = O\vec{e}_1 - AKC$ в/у q

Тогава $P_3(X_3)_k$ - относно k $\Rightarrow$ Тогава гласи че $X_1 = -X_2$ $\Rightarrow$

$$(P_1P_2P_3P_4) = \frac{X_1-X_3}{X_2-X_3}\,\frac{X_2-X_4}{X_1-X_4} = -1 = \frac{X_3-X_3}{-X_1-X_3}\,\frac{-X_1-X_4}{X_1-X_4} \Rightarrow$$

$$(X_1+X_3)(X_1-X_4) = -(X_1+X_3)(X_1+X_4)$$

$$X_1^2 - X_1X_4 + X_1X_3 - X_3X_4 = -X_1^2 - X_1X_4 + X_1X_3 + X_3X_4$$

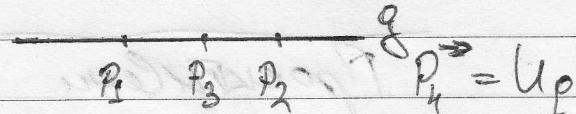
$$2X_1^2 = 2X_3X_4 \Rightarrow X_1^2 = X_3X_4 \Rightarrow$$

$$\overline{OX_1}^2 = \overline{OX_3}\,\overline{OX_4}$$

св-во

3) Нека $P_1P_2P_3$ са крайни и колинеарни с q, а P_4 е безкрайна на q ($P_4 \in U_q$) Тогава групата $P_1P_2P_3P_4$ е хармонична $\Leftrightarrow$ P_3 е среда на (P_1P_2)

Док-во



Нека $k = O\vec{e}_1 - AKC$ в/у q

$O(0,1)$, $U_q(1,0)$

$P_3 = X_3U_q + 1.O$ $(s=123)$

$(24) = \begin{vmatrix} x_2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \Rightarrow$

$(P_1P_2P_3P_4) = \frac{(13)(24)}{(14)(23)} = \frac{x_1 - x_3}{x_2 - x_3} \cdot \frac{(-1)}{(-1)} = \frac{x_1 - x_3}{x_2 - x_3} \Rightarrow$

$(P_1P_2P_3P_4) = -1 \Rightarrow x_1 - x_3 = x_3 - x_2$

$2x_3 = x_1 + x_2 \Rightarrow P_3$ е среда на (P_1P_2)

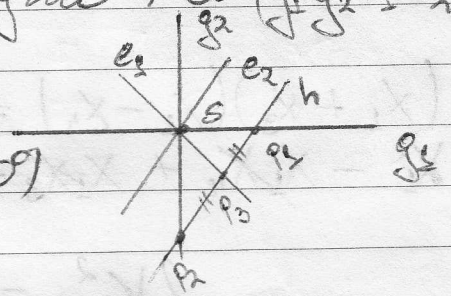
Деф

Четворката прави $q_1q_2q_3q_4$ от един сноп се нарича хармонична група, ако $(q_1q_2q_3q_4) = -1$

св-ва

4) Нека q_1q_2 са крайни прави и l_1 l_2 са техните ъглополовящи. Тогава $q_1q_2l_1l_2$ е хармонична група т.е. $(q_1q_2l_1l_2) = -1$

(от P_3 среда на (P_1P_2).)
$(h \parallel l_2)$ (2 ъглополовящи образуват 90°)



Док-во

Избираме права h: $\begin{cases} \nparallel S \\ \parallel l_2 \end{cases}$

Нека $h \cap q_2 = P_1$ $\quad h \cap l_1 = P_3$

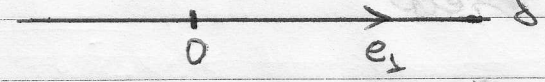
$h \cap q_1 = P_2$ $\quad h \cap l_2 = P_4 = h \parallel l_2$

$(q_1q_2l_1l_2) = P_1P_2P_3P_4 = -1 \Leftrightarrow$ (св-во 3)
P_3 среда на (P_1P_2)

Проективни координати на точките в/у права

Лема Нека $P_1P_2P_3$ са различни колинеарни точки и δ е дадено число или $\delta = \infty$. Тогава $\exists$ единствена точка P_4 със свойство $(P_1P_2P_3P_4) = \delta$

Док-во



$P_3 = x_3 4_g + t_3 0$

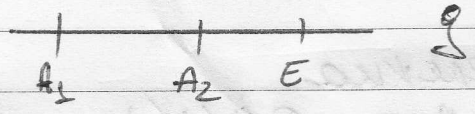
$0(0,1)$

$4_g(1,0)$

$$(P_1P_2P_3P_4) = \frac{x_1t_3 - x_3t_1}{x_1t_4 - x_4t_1} \cdot \frac{x_2t_4 - x_4t_2}{x_2t_3 - x_3t_2} = \delta$$

Винаги има решение относно $(x_4 t_4) \Rightarrow$ Ок

Нека A_1A_2 и E са различни точки в/у g
Тогава тройката $K = [A_1A_2E]$ се нарича проективна координатна система в/у g



Ако $P \in g$ то $\exists!$ ($!$-единствен) X, т.че
$X : X = (A_1A_2EP)$

обратно
за $\forall X \in \mathbb{R}$ или $X = \infty$ $\exists!$ т. $P \in g$ т.че
$X = (A_1A_2EP)$ съгласно лема

$P(X)_K$ - X- проективна нехомогенна координата на P относно K

Ако $P \equiv A_1 \Rightarrow (A_1A_2EA_1) = \infty$
т. A_1 се нарича изключена точка

Ако $P \equiv A_2 \Rightarrow (A_1A_2EA_2) = 0$ (A_2-нулева точка на K)

Ако $P \equiv E \Rightarrow (A_1A_2EE) = 1$ (E - единична точка)

Ако $P \not\equiv A_1 \Rightarrow X(P) \neq \infty \Rightarrow$

Деф

$\forall$ наредена двойка $(x_1 x_2) \neq (0,0)$ и $\frac{x_1}{x_2} = X$ се нарича хомогенни проективни координати на P

В частност пишем $P(x_1 x_2)_K$

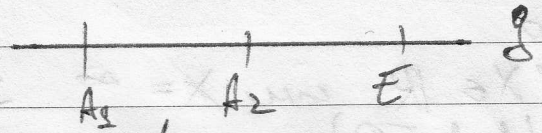
Ако $P = A_1$ то $\forall$ двойка $(x_1, 0)$ $(x_1 \neq 0)$ се нарича хомогенни проективни координати на A_1. Пишем $A_1(x_1 0)_K$

$A_1(10)$ $A_2(01)$ $E(11)$

Забележка

Ако $P(X_1 X_2)_K$ то $P(\lambda x_1, \lambda x_2)_K$, $\lambda \neq 0$

Изборът на λ се нарича нормиране на координатите на P



$E = \lambda A_1 + \mu A_2$ (хомогенни афинни координати)

Т61

Ако $P = x_1 A_1 + x_2 A_2$ то $(x_1 x_2)$ са ХАК ($x_1 x_2$ - хомогенни афинни координати) т.е. хомогенни проективни координати на P относно $\mathcal{U} = [A_1 A_2 E]$

обратно

Ако Рима ХПК (хомогенни проективни координати) $P(x_1 x_2)_K$ то е в сила $P = x_1 A_1 + x_2 A_2$

→ Нека $P = x_1 A_1 + x_2 A_2$; $E = 1A_1 + 1A_2$

$(A_1 A_2 EP) = \frac{x_1}{x_2} = X(P)$

нехомогенни проективни координати

от $X(P) \Rightarrow (x_1 x_2)$ са ХПК

← Нека $P(x_1 x_2)_K$ – ХПК. Понеже $P \in g$ то $\exists$ $(\lambda_1 \lambda_2) \neq (0,0)$ т.че $P = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2$, $E = A_1 + A_2$

$(A_1 A_2 EP) = \frac{x_1}{x_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \rho \Rightarrow \frac{x_1}{\lambda_1} = \frac{x_2}{\lambda_2} = \rho' \Rightarrow$

$P = \frac{x_1}{\rho'} A_1 + \frac{x_2}{\rho'} A_2 \Rightarrow P = x_1 A_1 + x_2 A_2$

1 следствие умножение с ρ'

Тв1

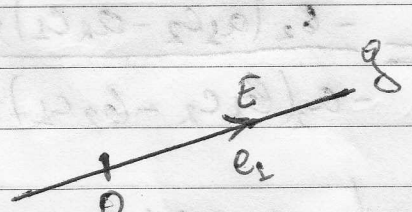
Афинните координати в/у права са специални проективни координати, т.е. проективните координати са обобщение на афинните

Док-во

Нека $K_A = O\vec{e_1}$ – АКС

т. $E(1,1)$

т. $O(0,1)$ $U_g(1,0)$



Ако $P(xt)$ - хомогенни афинни координати то

$P = x U_g + tO$

Док-во

Въвеждаме проективна координатна система

$K_\Pi = [U_g O E]$ =>

имаме че $(U_g O E P)\left(\frac{x}{t} \Rightarrow P(xt)_{K_\Pi}\right)$

хомогенни координати

от $\vec{E} = A_1 + A_2 \Rightarrow U_g + O \Rightarrow$

$P = x U_g + tO$ т. е. $P(xt)_{K_\Pi} \Rightarrow$ афинните хомогенни координати са специални проективни

Смяна на проективна координатна система в/у права

I/ Нека $K = [A_1 A_2 E]$ и $K' = [A_1' A_2' E']$ са две проективни координатни системи в/у g. Тогава съществуват числа $a_{11}\ a_{12}\ a_{21}\ a_{22}$ т.ч. $\det a_{ij} \neq 0$, т.ще $P_K(x_1 x_2)$, $P_{K'}(x_1' x_2')$ т.о е в сила

$$P_{x_1'} = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \text{ и } P_{x_2'} = a_{21} x_1 + a_{22} x_2$$

Док-во

Нека $A_1' = a_1 A_1 + a_2 A_2$, $A_2' = b_1 A_1 + b_2 A_2$,

$E' = c_1 A_1 + c_2 A_2$, $P = x_1 A_1 + x_2 A_2$

Тогава знаем ще ако $P_{K'}(x_1' x_2')$ т.о

$$\frac{x_1'}{x_2'} = (A_1' A_2' E' P) = \frac{(a_1 c_2 - a_2 c_1)(b_1 x_2 - b_2 x_1)}{(a_1 x_2 - a_2 x_1)(b_1 c_2 - b_2 c_1)} =$$

$$= \frac{-b_2(a_1 c_2 - a_2 c_1) x_1 + b_1 (a_1 c_2 - a_2 c_1) x_2}{-a_2 (b_1 c_2 - b_2 c_1) x_1 + a_1 (b_1 c_2 - b_2 c_1) x_2}$$

Дефинираме

$$\left.\begin{aligned} a_{11} &= -b_2 (a_1 c_2 - a_2 c_1) \\ a_{12} &= b_1 (a_1 c_2 - a_2 c_1) \\ a_{21} &= -a_2 (b_1 c_2 - b_2 c_1) \\ a_{22} &= a_1 (b_1 c_2 - b_2 c_1) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{x_1'}{x_2'} = \frac{a_{11} x_1 + a_{12} x_2}{a_{21} x_1 + a_{22} x_2}$$

? $\det a_{ij} \neq 0$

$$\det a_{ij} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} = \underbrace{(a_1 c_2 - a_2 c_1)}_{\neq 0} \underbrace{(b_1 c_2 - b_2 c_1)}_{\neq 0} \underbrace{(b_1 a_2 - a_1 b_2)}_{\neq 0}$$

защото $A_1' A_2' E'$ са различни точки !!!

обратно

Тв. Нека е дадена проективна координатна система $K=[A_1A_2E]$ с/у q и 4 числа a_{ij} $(i,j=1,2)$ за които $\det a_{ij}\neq 0 \Rightarrow \exists!$ проективна координатна система $K'=[A_1'A_2'E']$ т.че връзката м/у старите (x_1x_2) и новите $(x_1'x_2')$ координати на т.P спрямо K и K' съответно се дава с формула

$$\rho x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2$$
$$\rho x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2$$

Док-во

$A_1'(1,0)$, $A_2'(0,1)$, $E'(1,1) \Rightarrow$ Ако $A_1'(x_1x_2)_K$ то имаме

$$\left.\begin{aligned} 1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ 0 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix}}{a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}} = \frac{a_{22}}{a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & 1 \\ a_{21} & 0 \end{vmatrix}}{\det(a_{ij})} = \frac{a_{21}}{\det(a_{ij})} \Bigg\} \Rightarrow$$

лесно се проверява че връзката м/у $x_1'x_2'$ и x_1x_2 е

$$\left.\begin{aligned} \rho x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \rho x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{единствена} \quad !!!$$